Studi sulla Formazione: 20, 151-163, 2017-2
DOI: 10.13128/Studi_Formaz-22177 | ISSN 2036-6981 (online)

Natura dei modelli mentali e implicazioni categoriali: un'introduzione

Alberto Binazzi

Esperto di psicologia cognitiva

Corresponding author: alberto.binazzi@libero.it

Abstract. Mental models theory by Johnson-Laird is a theory of mind devoted to offer a uniform image of mental processes within the framework of classical cognitivism. Applied to the study of deductive competence, it has shown to have a particular predictive capability, thanks to the development of computer programs able to simulate actual performances of human beings in solving logical problems. The present paper aims at updating the debate on the nature of Johnson-Laird's mental models by analysing their relation with mathematical notions relevant for logical enquiry. Links among algebraic properties of logical connectives, perception patterns and topology are examined. We will also explore some connections between group theory and graph theory with mental models and propose some implications of Category Theory for potential applications to cognitive science and education.

Keywords. Mental models, mind, logical enquiry, logical connectives

---

"…la logica è l'insieme delle leggi che regolano un processo mentale
che solo per finzione può essere rappresentato nella forma statica di
un simbolismo;
spiegare i rapporti logici significa dunque riconoscere
le operazioni della mente che valgono a significare".

Federigo Enriques

1. Strutture cognitive e logiche simmetrie

I modelli mentali di Johnson-Laird, nella loro applicazione alla logica, sono "ambienti" cognitivi in grado di rappresentare una semantica adeguata per processi di tipo deduttivo[1]. Una lacuna della relativa teoria consiste nella parziale analisi dei rapporti tra gli elementi generatori dei modelli mentali e i processi di pensiero coinvolti. Che relazione c'è, infatti, tra percezione, spazialità e pensiero logico? Da cosa è costituito/implementato il *software* dei modelli mentali? È possibile precisarne matematicamente i principi compositivi e strutturali? Da parte dei sostenitori della teoria non è stata adeguatamente indagata la natura delle relazioni tra pensiero logico e processi cogniti-

[1] Per una chiara introduzione alle implicazioni della teoria dei modelli mentali per l'analisi del pensiero logico e per le scienze cognitive, si veda Johnson-Laird (2008).

vi coinvolti nella costruzione e manipolazione dei modelli mentali, assumendo, spesso, l'esistenza di tali strutture come dato di fatto e descrivendole come entità statiche, né è stata fornita un'analisi del pensiero matematico, alla luce dei recenti contributi offerti dal filone di ricerca della *embodied cognition*.

In che modo, invece, emergono le proprietà logiche manifeste già a livello di una manipolazione intuitiva di tali strutture cognitive? Se assumiamo che una competenza logica matura richieda la strutturazione di vari livelli gerarchici a partire da potenzialità bio-logiche, è precisabile matematicamente questa dinamica? E cosa impone vincoli all'esplorazione esaustiva dello spazio logico? L'indagine matematica può chiarificare questi interrogativi nello spirito della scienza cognitiva? L'esigenza di precisare matematicamente i principi alla base della dinamica generatrice di specifiche strutture cognitive quali sono i modelli mentali conduce a confrontare tali principi con quelli classicamente addotti dai teorici, riferibili a modelli di automi finiti, classi di algoritmi (neo-lamarkiani, procedure multistadio) e dunque riconducibili a una visione della cognizione ancora troppo ancorata al paradigma computazionale classico.

Chi fa ricerca sperimentale nel campo della competenza deduttiva spesso omette di ricordare che gli stessi connettivi logici manifestano proprietà algebriche: tra quelle più evidenti, gli esempi della commutatività e associatività di congiunzione e disgiunzione. Tali proprietà algebriche trovano riscontro in precisi oggetti matematici, le funzioni di verità, che associano valori di verità a enunciati e questo non spiega, semmai *mostra*, la presenza di proprietà algebriche. Strutture cognitive come i modelli mentali non vivono però in un ambiente astratto, ma sono il prodotto di precisi processi neurali e computazionali. Occorre quindi indagarne i presupposti genetici e interrogarsi sulla loro natura matematica. Nel caso del ragionamento con connettivi è possibile ipotizzare principi di natura gestaltica che vincolino le potenzialità esplorative dei soggetti? Ad esempio, la confusione tra congiunzione e implicazione o tra implicazione e doppia implicazione? Naturalmente, la casistica riscontrata nelle cosiddette 'illusioni cognitive' non si limita soltanto alla logica (classica). Occorre infatti tener conto che principi analoghi sono rilevanti per i processi percettivi alla base delle operazioni di costruzione dei modelli mentali.

Il legame tra il comportamento dei connettivi e la natura dei modelli mentali non è arbitrario: esistono precisi vincoli matematici. Alcuni aspetti dei connettivi si possono descrivere limitandosi a considerare la struttura di semigruppo; un semigruppo è definito come un insieme G non vuoto con un'operazione binaria fissata $\circ$ che sia associativa, ovvero: $g1 \circ (g2 \circ g3) = (g1 \circ g2)$ o $g3$ per ogni $g1, g2, g3$ in G. Un semigruppo commutativo è detto abeliano se $(a \circ b) = (b \circ a)$. L'equivalenza logica, la congiunzione e la disgiunzione sono commutative e associative; l'implicazione, invece, non è commutativa e né associativa poiché $(a \circ b) \neq (b \circ a)$ e dunque $(b \circ a) \circ b \neq b \circ (a \circ b)$.

Ricordando inoltre che per il Teorema di Cayley ogni gruppo è isomorfo a un gruppo di permutazioni, chiamato "gruppo simmetrico", sia adesso l'applicazione identica I, ovvero $aI = a$ e $bI = b$ e A l'applicazione tale che $aA = b$ e $bA = a$, allora (si osservi la terza tra le tavole di composizione sotto riportate) $A^2 = I$. Possiamo infine notare che le tavole considerate sono *isomorfe* al seguente gruppo simmetrico di ordine 2, indicando con {1,2} un generico insieme di 2 elementi, i (1 2) = (1 2) e θ (1 2) = (2 1). Si noti infine la "simmetria" del connettivo logico $\leftrightarrow$ (doppia implicazione) la cui tavola di verità, ove *0* sta per Falso e *1* sta per Vero, è *isomorfa* alla tavola di moltiplicazione del gruppo di simmetria bilaterale del corpo umano che contiene due elementi, l'identità (*I*) e la riflessione (*r*) rispetto a un piano verticale ove '○' significa "composto con"

○ *I r*	↔*a b*	○ *I A*	○ *i θ*
I I r	a 1 0	I I A	i i θ
r r I	b 0 1	A A I	θ θ i

Nel caso del connettivo implicazione (→) la simmetria osservabile già a questo livello logico di base non è preservata per la presenza del seguente stato di cose $(0 \rightarrow 1) = 1$ ritenuto, non a caso, anche il più 'paradossale'. Alla luce di questa breve analisi, è istruttivo domandarsi quale sia la relazione tra principi combinatori (algebrici/geometrici) e modelli mentali, intesi nella precisa accezione di strutture cognitive 'intermedie' per lo sviluppo e l'acquisizione di competenze logiche. È possibile, inoltre, individuare specifici vincoli topologici (come la "connessione" di uno spazio) che conducono alla *focalizzazione* di un sottoinsieme di modelli mentali tra i possibili logicamente accessibili?

2. Grafi e modelli mentali

Intendiamo ora mostrare che esiste un legame tra strutture logiche e le strutture matematiche di grafi e spazi che può contribuire a spiegare la natura dei fenomeni cognitivi ed è in grado di interferire con la validità di una deduzione. Cominciamo con un esempio che potrebbe essere utilizzato in qualsiasi laboratorio di psicologia sperimentale. Un soggetto *H* (essere umano) e un agente *R* (robot, programma) sono impegnati a risolvere un problema come il seguente (π):

Data la seguente forma argomentativa,

(π) $\Psi \rightarrow \Phi$
$\Phi \rightarrow \beta$

Cosa dedurre? Osserviamo che per dedurre correttamente i modelli delle premesse devono essere 'incollati', componendoli in un modo univoco. Vi potranno essere differenti strategie di risoluzione, ma l'esito finale della costruzione e manipolazione dei modelli non potrà prescindere dalla presenza in memoria di tutti gli stati di cose compatibili con le premesse, se l'inferenza deve avere carattere necessario.

Alla rappresentazione esaustiva dei modelli completamente espliciti[2] che includono, secondo Johnson-Laird, anche il simbolo per l'operazione di negazione ¬ corrisponde la seguente matrice booleana (*C*)

	v1	v2	v3
v1	1	1	1
v2	0	1	1
v3	0	0	1
v4	0	0	0

[2] Per la descrizione dei principi computazionali alla base delle procedure di costruzione, manipolazione e integrazione dei modelli completamente espliciti, si veda Johnson-Laird (2008) pp.172-176.

DOI: 10.13128/Studi_Formaz-22177 | ISSN 2036-6981 (online)

A titolo di esempio, il grafo del primo modello mentale di (π) dove il simbolo ↓ identifica un 'cappio'è il seguente:

$$\begin{tikzcd} \downarrow \Psi \arrow[d, no head] & \\ \Phi \arrow[r, dash, dashed] & \beta \end{tikzcd}$$

Una volta associato alla matrice booleana *C* precedente il grafo (o multigrafo) corrispondente *G*, si possono indagare matematicamente concetti come 'percorso', 'ciclo' o 'sentiero' e studiarne così le proprietà geometriche (simmetria, connessione, cammini, cappi, ecc). Ad esempio, possiamo domandarci: esistono successioni alternate di vertici e spigoli in cui tutti gli spigoli e i vertici siano distinti? Quand'è che *G* è *connesso*? Ricordando che un grafo si dice connesso se esiste un sentiero tra due qualunque dei suoi vertici, è stato osservato, sulla base di numerosi dati sperimentali, che nel caso dell'implicazione (→) i soggetti costruiscono usualmente un solo modello mentale, il primo nell'esempio precedente, omettendo gli altri stati di cose che richiedono invece la rappresentabilità percettiva e cognitiva di negazioni.

Se rappresentare i modelli mentali completamente espliciti, corrisponde, da un punto di vista topologico, ad eludere il *principio di connessione* (nell'accezione generale che un grafo si dice connesso se esiste un sentiero tra due qualunque dei suoi vertici) può questo principio essere considerato l'equivalente geometrico del principio di verità che, secondo Johnson-Laird, limita, in prima battuta, la possibilità cognitiva di considerare ulteriori casi compatibili con le premesse? Questa domanda è importante in relazione al rapporto tra intuizione spaziale, logica e risorse cognitive. Osservando che una data rappresentazione planare (che può essere tracciata sul piano) di un multigrafo finito (ovvero che ha un numero finito di vertici e spigoli) è detta mappa e che una mappa è connessa se lo è anche il corrispettivo grafo, è opportuno ricordare il Teorema di Eulero che pone il numero di V dei vertici, il numero S degli spigoli e il numero R delle facce di un poliedro, che diventano le regioni di una mappa connessa, in un preciso rapporto numerico:

$$V - S + R = 2$$

Il pensiero matematico offre esempi di invarianti, di identità strutturali comuni ai diversi domini e il concetto sarà chiarito ancora meglio analizzando i contributi dell'impostazione categoriale della matematica che, secondo Mac Lane, dimostra come le proprietà algebriche possano essere altresì espresse per mezzo di diagrammi *commutativi* evidenziando così i principi strutturali dell'architettura della matematica. Ci sono, inoltre, recenti studi e ricerche che sfruttano l'apparato categoriale per sviluppare modelli matematici della cognizione e quanto tali modelli siano realmente alternativi ai modelli classici è oggetto di attuale dibattito tra i ricercatori attivi nel campo delle scienze cognitive. Viceversa, le proprietà "geometriche" analizzate in precedenza possono essere indagabili anche a livello neurocognitivo. Tra queste, topologie neuronali, livelli di connettività, stabilizzazione sinaptica. Se colleghiamo al livello di analisi geometrica delle matrici booleane precedenti, quello soggiacente neurocognitivo individuato dalle topologie neuronali, questi due ambiti di funzionamento sono formalizzabili in una cornice categoriale?

Recenti sviluppi della teoria dei modelli mentali hanno condotto allo sviluppo e alla implementazione di un modello computazionale dell'architettura cognitiva sopra ricordata e chiamato *mReasoner v0.9*.[3] Il software è pensato come composto globalmente da due sistemi: un analizzatore semantico che a partire da dati linguistici attiva un sistema 1 (*model building*) incaricato di costruire i modelli mentali e un sistema 2 che incorpora le procedure ricorsive per modificare i modelli costruiti inizialmente. Solo l'attivazione del secondo sistema (*model revision*) garantirebbe la validità di una deduzione.

3. Topologia, modelli mentali, spazio logico

Una deduzione può essere concettualizzata come 'cammino' da uno stato iniziale a uno finale, secondo precisi vincoli, indagabili matematicamente e operanti nell'essere umano (limiti della memoria di lavoro, differenze individuali nelle competenze spaziali, uso di euristiche). Possiamo ipotizzare che tali limiti conducano nell'essere umano e in un sistema artificiale a cammini differenti non mappabili con continuità l'uno nell'altro a meno di accettare una sostanziale perdita di informazione. Topologicamente, si tratterebbe di cammini non *omotopici*. Se consideriamo la rappresentazione schematica dei modelli mentali (vedi esempio precedente) ciascuno ha una struttura topologica specifica; il primo modello infatti può essere concepito come uno spazio 'mentale' *connesso*, e si tratta di una caratteristica rilevante. Questa proprietà "geometrica" potrebbe spiegare come mai nei casi sperimentali come quello menzionato, i modelli mentali devono essere costruiti uno alla volta, visualizzando gli stati di cose compatibili con il *set* di proposizioni in linguaggio naturale?

È ipotizzabile che la riposta a questa domanda possa essere positiva, alla luce delle osservazioni precedenti che mettono in evidenza connessioni tra topologia, percezione e cognizione, in particolare nell'analisi spaziale e percettiva appunto, dato che l'estrazione di proprietà topologiche è considerata una delle funzioni primarie del sistema visivo, cfr. Chen (2005). Inoltre queste funzioni cognitive sono condivise con i sistemi deputati all'analisi del linguaggio e risultano centrali anche per i processi coinvolti nel ragionamento deduttivo. Appare dunque ragionevole correlare le evidenze sperimentali con la focalizzazione ricorrente su un sottoinsieme di modelli mentali con vincoli topologici e geometrici prima che logici, poiché essi risultano importanti anche per il reclutamento dei processi ricorsivi di ricerca dei controesempi, processi che comportano l'attivazione delle aree corticali prefrontali.

Il principio di *isomorfismo strutturale* caratteristico dei modelli mentali fin dalla loro genesi teorica, è una proprietà topologica invariante posseduta al mutare delle diverse rappresentazioni di un dato stato di cose. Per la costruzione di un ipotetico modello mentale di "α è alla destra di β" non abbiamo bisogno di nessuna specifica informazione relativa alla metrica della scena o alle dimensioni e forma di α e β. Le rappresentazioni topologiche si collocano a un livello di astrazione necessario per rappresentare il tipo di informazione sufficiente per la manipolazione cognitiva implicata in una deduzione.

---

[3] mentalmodels.princeton.edu/models/mreasoner/

DOI: 10.13128/Studi_Formaz-22177 | ISSN 2036-6981 (online)

Recenti scoperte neuropsicologiche sembrano convalidare l'ipotesi di un substrato neurale comune ad azione, percezione e ragionamento, cfr. Gallese, Lakoff (2005). Nel settore della semantica cognitiva, le stesse operazioni logiche sono state da tempo concepite come il risultato del sollevamento, dalla base percettiva, di proprietà topologiche, cfr. Peruzzi (2004). Si tratta dunque di comprendere ancora meglio gli aspetti dinamici e compositivi dei processi di 'sollevamento' dalla base percettiva e motoria, dato che un 'risultato' presuppone molte operazioni propedeutiche finemente raccordate tra loro. Seguendo questa impostazione, la combinatoria di precisi *pattern* topologici concepiti come base per l'emergenza, via *lifting* categoriale[4], di proprietà logiche, può condurre alla costruzione interna di interfacce come i modelli mentali?

Secondo Lakoff e Núñez (2005) esistono precisi schemi d'immagine di natura percettiva e concettuale che incorporano "logiche spaziali". Tali schemi sono fisicamente implementati dal nostro sistema neurocognitivo e utilizzati per ragionare, comprendere il linguaggio naturale, sviluppare idee e concetti matematici. L'esempio precedente del grafo orientato sarebbe una variante generata dallo schema 'sorgente-percorso-obiettivo' che ha una precisa topologia, metaforizzabile/mappabile su altri domini, incluso quello matematico. Riferendosi al problema (π) che non è esaustivo della casistica, la situazione immaginata può essere metaforizzata come uno spazio contenitore: se ci sono oggetti all'esterno di tale spazio essi sarebbero la rappresentazione cognitiva di precise operazioni logiche (nel caso, negazioni). Non è l'unica interpretazione ovviamente, poiché, una volta concepita la negazione come espressione simbolica della operazione geometrica di 'inversione' essa può trovare formalizzazione matematica all'interno della teoria dei gruppi. È poi interessante notare che la 'rotazione' e la 'riflessione', due esempi differenti della più generale operazione di 'inversione' considerate equivalenti all'interno del riferimento classico non lo sono in una logica a più di due valori di verità, cfr. Varzi, Warglien (2003).

Un meccanismo costitutivo e ricorrente del funzionamento cognitivo è la metafora concettuale, intesa come mappa fondata che conserva l'inferenza tra domini. Non si tratta tanto di un isomorfismo nel senso matematico, quanto di un meccanismo neurale che permette di usare la struttura inferenziale di un dominio concettuale, per esempio quello geometrico, per ragionare su un altro dominio, per esempio quello aritmetico.[5] L'analisi cognitiva delle idee matematiche da parte di Lakoff e Núñez ha come riferimento il paradigma della cosiddetta *embodied cognition*; la matematica, così come la logica, sono il prodotto di determinate facoltà cognitive indagabili a livello neuroscientifico:

> La sola via di accesso che hanno gli esseri umani a una qualsiasi forma di matematica, o trascendente o di altro tipo, è tramite i concetti presenti nelle loro menti che sono modellati dai loro corpi, dai loro cervelli e attuati fisicamente nei loro sistemi neurali.[6]

Alcuni problemi restano irrisolti in una prospettiva di integrazione delle proposte classiche (computazionali) alla cognizione con quelle più naturalistiche e non riguardano soltanto la proposta dei modelli mentali: principalmente, l'incompleta rappresentazione

[4] Per i dettagli formali alla base del *liftting* categoriale, si veda Peruzzi (2006).
[5] Lakoff, Núñez (2005) p.29.
[6] Lakoff, Núñez (2005) p.422.

dello spazio logico, la natura del formato simbolico di tali rappresentazioni, il raccordo con la fisiologia cerebrale.

I modelli mentali infatti rappresentano sottoinsiemi (piccoli) dello spazio logico e l'esplorazione dello spazio logico con le sue potenziali *ramificazioni* è già fortemente orientata nel suo percorso. I soggetti accedono a un sottoinsieme piccolo di stati di cose, non visualizzano le negazioni (per ovvie ragioni percettive) confondono la semantica dei connettivi, non vanno in modo sistematico alla ricerca di controesempi. La logica minimale di uso quotidiano, è, probabilmente, riconducibile a terzo escluso, legge di non contraddizione, sillogismo disgiuntivo, modus ponens, modus tollens, equivalenza (fallace) dell'implicazione e della congiunzione. Consideriamo adesso questo esempio:

Se l'universo non è infinito (allora) deve avere necessariamente un confine.[7]

$\neg$ (infinito) $\rightarrow$ (confine)

Questa implicazione non è così ovvia come sembrava ai filosofi dell'antichità. Si tratta di un 'errore' logico che ben si colloca nella casistica individuata dai teorici dei modelli mentali e osservata in numerosi esperimenti. Quanti esempi come questo è possibile incontrare nella storia del pensiero scientifico e filosofico?

La natura del rapporto tra pattern basilari della cognizione topologica e gli schemi motori, i vincoli alla combinatoria del pensiero, i contributi delle logiche non classiche sono alcuni dei temi che meritano ulteriori indagini e che possono arricchire l'analisi fin qui considerata. Tra le logiche non classiche, la logica lineare mostra alcune connessioni con il metodo dei modelli mentali. Essa viene infatti definita anche logica delle risorse computazionali: con riferimento al precedente esempio (π) il condizionale $\alpha \rightarrow \beta$ è interpretato nella seguente accezione "esattamente una risorsa di tipo α consente di ottenere esattamente una risorsa di tipo β". Dunque da $\alpha \rightarrow \beta$ e $\alpha \rightarrow \gamma$ non segue la formula $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$, valida invece classicamente, cfr. Palladino, Palladino (2007). La logica lineare fa parte del più ampio insieme delle logiche sub-strutturali, ovvero sistemi logici che rifiutano una o più caratteristiche strutturali della logica classica o intuizionistica. I connettivi della logica lineare diventano così un caso particolare di una semantica più ricca e non più riconducibile a una semantica bivalente in cui gli unici due valori sono 0 e 1, cioè il Vero e il Falso delle tavole di verità su riportate.

4. Costruzioni universali e soggetto cognitivo: matematica e psicologia

La Teoria delle Categorie introdotta da Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane nel 1945, vede la sua genesi nell'indagine dei rapporti tra algebra e geometria, e, in particolare, "dalle esigenze di precisazione sistematica dei rapporti 'funtoriali' fra proprietà di spazi (con funzioni continue tra essi) e proprietà di strutture algebriche (con relativi omomorfismi), innanzitutto gruppi di omotopia e di (co-) omologia", cfr. Peruzzi (2006). Una categoria può essere concepita come 'monoide generalizzato' ovvero come un insieme con un'operazione binaria parziale di moltiplicazione che è associativa e dotata

[7] Balzarotti, Lava (2009) p.46

DOI: 10.13128/Studi_Formaz-22177 | ISSN 2036-6981 (online)

di unità. Gli elementi di tale monoide sono a loro volta una collezione di morfismi tra oggetti che soddisfano le condizioni seguenti: la composizione dei morfismi è associativa e per ciascun oggetto c'è un morfismo identità.

Più precisamente, una categoria è:

a) composta da oggetti e morfismi f: X → Y, da un oggetto dominio X e un oggetto condominio Y. Gli oggetti possono essere, per esempio, spazi, proposizioni, gruppi e i morfismi saranno dunque funzioni continue, deduzioni, omomorfismi.

b) la composizione ○ di due morfismi $g \circ f$ è definita quando il codominio di f è il dominio di g. Dunque se f: X → Y e g: Y → Z allora è definito il morfismo $g \circ f$: X → Z e la composizione è associativa, ovvero, dato h: Z → W, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

c) per ciascun oggetto c'è un morfismo identità (elemento neutro).

Alcuni esempi di categorie: la categoria *Set* ha per oggetti gli insiemi e come morfismi le usuali funzioni, la categoria *Top* ha per oggetti gli spazi e come morfismi le funzioni continue, la categoria *Grp* ha per oggetti i gruppi e come morfismi gli omomorfismi tra gruppi. Attraverso gli strumenti offerti dall'apparato categoriale è stato possibile offrire un quadro epistemologico alternativo alla teoria degli insiemi quale cornice dei fondamenti della matematica. Infatti, il concetto di insieme non è che uno dei concetti matematici che possono essere assiomatizzati in linguaggio categoriale: tra questi, anche le nozioni basilari della logica e la relativa formalizzazione ha condotto a una semantica alternativa a quella tarskiana (mediante la nozione centrale di 'funtore aggiunto'). Le applicazioni dei concetti categoriali non sono inoltre confinate all'architettura della matematica, ma si estendono, per esempio, all'informatica, all'intelligenza artificiale e alla fisica dei sistemi dinamici.

Quali sono i principali contributi epistemologici offerti dalla teoria delle categorie per le scienze cognitive? Sono numerose, infatti, le aree di potenziale applicazione: poiché per l'approccio categoriale risultano centrali le nozioni di 'struttura', 'oggetto', 'morfismo', 'funtore', è ipotizzabile che alcune proprietà strutturali comuni ai diversi sistemi cognitivi (umani e artificiali) siano individuate e formalizzate a un livello di generalizzazione opportuna. Inoltre, se i neuroscienziati si pongono l'obiettivo di indagare la *struttura* e l'organizzazione del cervello umano con le sue peculiari capacità biologiche, non possono prescindere dalla conoscenza dei principali concetti categoriali, integrandoli con altri approcci, tra cui quello sistemico e dinamico, cfr. Gomez, Sanz (2009).

Concetti fondamentali come composizionalità, transitività, ricorsività sono definibili categorialmente formalizzando così i principi strutturali e generativi alla base di proprietà logiche e cognitive? La transitività e l'inclusione in una classe, per esempio, sono proprietà accessibili anche al cosiddetto sistema 1, quello intuitivo. Oppure pensiamo al concetto categoriale di 'prodotto: nella categoria Prop, che ha come oggetti proposizioni Φ,Ψ,..e come morfismi Φ → Ψ le prove di Ψ a partire da Φ, l'esistenza del prodotto esprime le proprietà logiche della congiunzione. Anche gli altri connettivi sono definibili in forma diagrammatica e le proprietà che caratterizzano i quantificatori (esistenziale e universale) sono descrivibili mediante equazioni per mezzo del concetto fondamentale di 'aggiunzione'.

Ipotizzando inoltre che specifiche competenze inferenziali siano la manifestazione cognitiva di proprietà matematiche ricorrenti, che forma avrebbe una possibile formalizzazione della *dinamica* dei due sistemi precedentemente ricordati (intuitivo e ricorsivo)? È possibile congetturare l'esistenza di una categoria in cui, per esempio, gli oggetti siano modelli mentali e i morfismi funzioni che preservano i valori di verità, ma l'evidenza sperimentale afferma che questo non accade, poiché non tutte le deduzioni si uniformano sempre a meta-principi logici. Come conciliare le richieste formali con i numerosi e, a volte, contraddittori dati sperimentali delle ricerche su pensiero e ragionamento?

Alcune proprietà categoriali sono assunte come soggiacenti alle 'risorse' strutturali ed emergenti dei sistemi cognitivi. Tra queste, il concetto categoriale di 'costruzione universale', concepito come un ingrediente fondamentale per comprendere la struttura matematica comune alle architetture cognitive (classiche e connessionistiche). La modellizzazione categoriale può infatti contribuire a spiegare perché determinate competenze cognitive siano distribuite in modo sistematico e non arbitrario, mettendo in luce le relazioni tra "universalità e risorse cognitive", cfr. Philips (2013).

Ci sono poi contributi che sfruttano l'impiego di tecniche categoriali, più orientate biologicamente, cfr. Brown, Porter (2003). Quale tipo di matematica occorre per connettere il livello neurologico con quello cognitivo? Il cervello ha evoluto dei sistemi in grado di estrarre e manipolare l'informazione secondo precisi vincoli biofisici e un obiettivo centrale per la ricerca è formalizzare logicamente i processi di scomposizione e ricomposizione dell'informazione. L'informazione infatti viene scomposta, analizzata e integrata dal cervello secondo modalità *non* arbitrarie: è definibile un *set* dinamico di combinazioni 'geometriche' attraverso cui tali processi si realizzano fisicamente nelle reti neurali? Offrendo una generalizzazione di molteplici concetti matematici, il linguaggio categoriale può stimolare una maggiore interazione tra matematici, filosofi e neuroscienziati. Pur trattandosi di indagini ancora allo stato di pure congetture, è utile ricordare che l'approccio categoriale esorta a pensare in termini dinamici le relazioni logiche tra strutture ed esige che siano definiti dominio e codominio di ogni dato morfismo/funtore affinché siano conservate la composizione e l'identità. Tali vincoli rappresentano un apporto salutare e orientato al rigore per la modellizzazione cognitiva, principio purtroppo non sempre soddisfatto da molte teorie filosofiche e psicologiche del passato e contemporanee. Sarebbe interessante individuare, tra i vari modelli cognitivi, quelli potenzialmente esprimibili in una cornice categoriale poiché già questa caratteristica indicherebbe un livello di adeguatezza formale preliminare.

5. Forme logiche, cognizione topologica, reti neurali

È stato osservato che il cervello umano mostra una connettività altamente organizzata a cui corrisponde una regolarità altrettanto organizzata, descrivibile attraverso l'analisi matematica dell'informazione in reti multimodulari distribuite; inoltre, i sistemi neurali e cognitivi possono essere entrambi compresi come sistemi fisici la cui dinamica è analizzabile matematicamente, cfr. Mizraji, Pomi, Valle-Lisboa (2009). Qual è il livello di interazione dinamica (dimensione geometrica e temporale) tra questi due piani di funzionamento per l'emergenza di *forme* logiche? Quali sono le relazioni tra i concetti di simmetria, differenziazione e complessità per lo sviluppo delle competenze deduttive? Infatti, quando si osserva una rottura di simmetria, si rompe l'ordine completo caratterizzato da invarianza rispetto a un gruppo di trasformazioni. Tanto più è grande il grup-

DOI: 10.13128/Studi_Formaz-22177 | ISSN 2036-6981 (online)

po delle trasformazioni rispetto a cui il sistema è invariante, tanto più è piccola la parte di esso necessaria per ricostruire il tutto, cfr. Bertuglia, Vaio (2007). Si ritorni in questa luce al rapporto tra simmetria e connessione (in senso topologico) per la combinatoria del pensiero logico: quanto appena osservato porta a ipotizzare che l'analisi neuro-cognitiva richieda un collegamento *selettivo*, rilevante sotto il profilo sistemico, tra aspetti algebrici, topologici e logici descrivibile categorialmente.

Un altro obiettivo, più vicino agli scopi tradizionali della scienza cognitiva, consiste nell'armonizzare gli approcci orientati matematicamente con il punto di vista del soggetto cognitivo inteso come prodotto dinamico di molteplici risorse, incluse competenze spaziali, linguistiche, percettive e motorie. Tra i contributi che meriterebbero un'analisi interdisciplinare e che fanno uso dell'apparato categoriale, cercando, allo stesso tempo, di fondare la ricerca su basi naturalistiche, vi è il concetto di "cognizione topologica" in questa precisa accezione:

> L'insieme di risorse che permettono a un sistema intelligente di elaborare un'immagine dello spazio circostante sulla base del modo in cui il proprio corpo si pone, si muove e agisce su altri corpi in funzione della loro posizione, del loro movimento e di ogni loro specifica *affordance*; inoltre, per "geometria" intendo qui la disciplina che abbraccia la struttura topologica (algebrica e differenziale), proiettiva e metrica dello spazio e dei corpi che in esso si possono trovare.[8]

L'idea di cognizione topologica si colloca all'interno di una proposta teorica più ampia che muove i suoi assunti dai contributi del matematico americano Bill Lawvere i cui studi sono considerati fondamentali per il processo di *geometrizzazione* della logica:

> Per conseguire questo scopo Lawvere sfruttava la ricchezza del concetto di aggiunzione tra funtori: un funtore F dalla categoria C alla categoria D, in simboli $F: C \to D$, si dice aggiunto sinistro di $G: D \to C$ (e G aggiunto destro di F) se, per ogni oggetto A di C e B di D, c'è una biiezione tra mappe $FA \to B$ e mappe $A \to GB$ che si estende lungo qualsiasi $A' \to A$ e $B \to B'$; cosicché la biiezione è un isomorfismo "naturale".[9]

Lawvere introdusse nel 1971 il concetto di *topos* elementare e dimostrò come ottenere i concetti principali della logica in termini di funtori aggiunti. La matematica classica, definita categorialmente, diventa un caso limite di matematica dove acquistano centralità oggetti *variabili* e *coesivi* su cui si ragiona costruttivamente. In una cornice epistemologica più generale che mira a valorizzare i fondamenti geometrici e topologici per l'analisi filosofica e semantica in particolare, la proposta del già ricordato '*lifting* categoriale' presuppone che le costruzioni "universali" tipiche del linguaggio categoriale abbiano la stessa forma di quelle che riconducono la concettualizzazione a *pattern* basilari della cognizione topologica. Compito delle scienze cognitive diventa dunque la comprensione delle caratteristiche dell'architettura neuronale capaci di estrarre, elaborare e infine codificare in un formato opportuno per la manipolazione simbolica le informazioni acquisibili attraverso finestre percettive relativamente modulari, cfr. Peruzzi (2006).

Come raccordare gli assunti matematici a fondamento del processo di *lifting* con la matematica utilizzata per descrivere i processi neuronali alla base di tale processo? Rile-

[8] Peruzzi (2006) p.50.
[9] Peruzzi (2006) p.54.

vante da un punto di vista cognitivo è l'importanza data in tale prospettiva teorica alla costruzione degli oggetti della percezione e, soprattutto, agli schemi di risposta motoria, ovvero alle azioni sugli oggetti per la genesi e formazione del significato così come per lo sviluppo di competenze logiche. Ipotesi che mostra molti punti di contatto con l'impostazione di Piaget, ma che se ne differenzia per la centralità degli aspetti topologico-geometrici intesi come *pattern* gestaltici di significato trasferibili a un livello simbolico in un formato adeguato per la loro manipolazione. L'ipotesi del *lifting* categoriale ha comunque il merito di armonizzare rigore matematico con i contributi delle ricerche in ambito cognitivo e neuroscientifico afferenti al filone della *embodied cognition*, approdando così verso una epistemologia naturalizzata orientata matematicamente. Si pensi infatti ai rapporti tra percezione, strutture cognitive e operazioni logiche: una volta postulato il radicamento del pensiero logico nella corporeità, chi si incarica tra le varie agenzie cognitive, di implementare il 'sollevamento' necessario per la genesi di strutture cognitive come i modelli mentali? E come codifica tale processo, a livello neurale, una *semantica* non arbitraria?

6. Logica e ragionamento: verso una consapevolezza metacognitiva

Gestalt percettive, schemi di immagine, prototipi, modelli mentali, forme logiche: come confrontare i vari gradi di astrazione? Già a un livello di spazialità basica – si pensi al ragionamento con matrici di Raven – è possibile dedurre, e qui sono in gioco vincoli topologici, prima che linguistici. Sono in azione le stesse risorse cognitive in deduzioni con oggetti spaziali e rappresentazioni proposizionali? Quali moduli si attivano affinché siano mantenute somiglianze strutturali e funzionali tra, poniamo, uno schema motorio, una gestalt e uno schema logico come il sillogismo disgiuntivo? Una forma logica è considerata astratta perché racchiude in sé una quantità infinita di stati di cose potenzialmente compatibili con quella forma, ma anche una gestalt è astratta, e lo è in un senso fenomenologico oltre che matematico.

Ciò che chiamiamo 'deduzione' non è prerogativa esclusiva della logica matematica riferita a espressioni verbali, dato che esistono processi deduttivi già manifesti a un livello base di manipolazione spaziale, percettiva, motoria e sonora (scacchi e sistema temperato, ad esempio). Esistono probabilmente logiche cognitive, percettive, spaziali, il cui funzionamento non è stato ancora adeguatamente compreso, poiché implicano un livello di analisi 'dal basso', che va a indagare le proprietà matematiche dei sistemi fisici e biofisici a fondamento della meccanica cognitiva comune a questi domini. Si pensi, in questa luce, ad Aristotele e alla sua classificazione dei 24 tipi di forme sillogistiche corrette tra 256 possibili. È indubbiamente merito di Johnson-Laird aver indagato i processi deduttivi, induttivi, creativi, arricchendone concettualmente l'analisi, sia implementando modelli computazionali che adoperandosi in ricerche sperimentali in psicologia cognitiva, anche con contributi orientati alla ricerca neuropsicologica e clinica.

La logica matematica sfrutta determinate risorse cognitive e cerca di sistematizzarle a un livello 'astratto', ma se è corretto assumere la natura biofisica dei processi deduttivi, devono essere individuati ancora meglio i vincoli che limitano l'esplorazione dello spazio logico in relazione a specifici principi di invarianza e connessione. L'impostazione categoriale può contribuire a identificare questi principi? Quali sono i legami principali tra tipi di azioni, schemi motori e topologia per la costruzione dei modelli mentali? Una

DOI: 10.13128/Studi_Formaz-22177 | ISSN 2036-6981 (online)

volta individuate le mappe neurali di un *set* di schemi di azione, in che modo la dinamica del sistema estrae le informazioni rilevanti per la genesi e stabilizzazione di forme logiche? Queste domande non hanno ancora risposte definitive, ma da esse deriva che, nell'indagine dei rapporti tra logica e processi cognitivi, esiste un quadro più ricco che non confina l'analisi soltanto nella cornice classica della *standard cognitive science*.

Gli sviluppi di queste ricerche hanno infine significative implicazioni di natura pedagogica. In che modo valorizzare i risultati sperimentali sulla competenza deduttiva, integrandoli con gli strumenti offerti dall'impostazione categoriale, per una precoce didattica della logica e della matematica? Quali sono le principali connessioni con il pensiero educativo, se consideriamo rilevanti le recenti scoperte in ambito cognitivo sul ragionamento per l'acquisizione di una efficace attitudine a riflettere costruttivamente sui problemi, che sia logicamente orientata? Si tratta, infatti, di un insieme di processi, indagabili a livello logico, computazionale e fisico, che si svolgono dinamicamente in ognuno di noi e che conducono alla costruzione di specifiche strutture cognitive, alla loro continua revisione, con uno sviluppo ricorsivo che comporta spesso una non semplice verifica delle proprie credenze. E, per la sua natura contemporaneamente riflessiva e operativa, questo è rilevante per la ricerca pedagogica.

Come valorizzare inoltre i contributi sperimentali della teoria dei modelli mentali, integrandoli con le recenti scoperte sulla naturalizzazione del pensiero logico e matematico (cognizione topologica, semantica cognitiva, aspetti motori e sensoriali dell'apprendimento della matematica) per una efficace didattica laboratoriale delle discipline scientifiche o per la pratica della *philosophy for children*? Coltivare una sano atteggiamento alla riflessione logica e cognitiva diventa allora centrale per coloro che si occupano di formazione nei più diversi campi del sapere, oltre ad essere necessario per acquisire quelle competenze epistemologiche e metacognitive fondamentali per il proprio ambito professionale. L'apporto di ciascuna disciplina (filosofia, pedagogia, matematica, psicologia) diventa imprescindibile per poter inquadrare correttamente i problemi, poiché l'idea che abbiamo di mente contiene in sé, già allo stadio di puro concetto, quelli che saranno poi i sentieri del proprio agire e-ducativo.

Bibliografia

Balzarotti G., Lava P. (2009) *Gli errori nelle dimostrazioni matematiche*, HOEPLI, Milano.

Baumslag B., Chandler B. (1983) *Teoria dei Gruppi*, Gruppo Editoriale Fabbri, Bompiani, Milano.

Bertuglia C.S., Vaio F. (2007) *Non linearità, caos, complessità*, Bollati Boringhieri, Torino.

Binazzi A. (2012) *Cognizione logica e modelli mentali*, Studi sulla Formazione, Firenze University Press, Firenze, pp.69-84.

Brown R., Porter T. (2003) *Category Theory and Higher Dimensional Algebra: potential descriptive tools in neuroscience*, Proceedings of the International Conference on Theoretical Neurobiology, Delhi, National Brain Research Centre, pp.80-92.

Casati R. (2002) *Topology and Cognition*, Encyclopedia of Cognitive Science, Macmillan Nature Publishing Group, vol.4, pp.410-417.

Chen L. (2005) *The topological approach to perceptual organization*, Visual Cognition, 2005, 12 (4) pp.553-637, Psychology Press.

Feynman R.P. (2005*) Sei pezzi meno facili*, Adelphi Edizioni, Milano.
Gallese V., Lakoff G. (2005) *The brain's concepts: the role of the sensory-motor system in conceptual knowledge,* Cognitive Neuropsychology, 2005/22, pp.455-474.
Gomez J., Sanz R. (2009) *Modeling cognitive systems with Category Theory*, Proceedings CMMSE 2009, Gijōn.
Gowers T. (2004) *Matematica: un'introduzione*, Einaudi, Torino.
Johnson-Laird, P.N. (1993) *Deduzione, Induzione, Creatività: pensiero umano, pensiero meccanico*, Il Mulino, Bologna.
Johnson-Laird P.N. (1996) *Mental Models, deductive reasoning and the brain*, in The Cognitive Neuroscience (Eds) Michael S.Gazzaniga, Bradford Book, MIT Press, Cambridge, London, England, pp.999-1008.
Johnson-Laird P.N. (2008) *Pensiero e ragionamento*, Il Mulino, Bologna.
Khemlani S., Trafton J.G. (2012) *mReactr:A computational theory of deductive reasoning*, Proceedings of the 34th Annual Conference of the Cognitive Science Society, Austin, TX, Cognitive Science Society.
Lakoff G., Johnson M. (2004) *Metafora e vita quotidiana*, Bompiani, Milano.
Lakoff G., R.E. Núñez (2005) *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*, Bollati Boringhieri, Torino.
Mac Lane S. (1977) *Categorie nella pratica matematica*, Boringhieri, Torino.
Metta G., Sandini., Vernon D., Natale L. (2008) *The iCub humanoid robot: an open platform for research in embodied cognition*, Proceedings of the 8th Workshop on Performance Metrics for Intelligent Systems, pp.50-56, ACM New York, NY, USA.
Mizraji E., Pomi A., Valle Lisboa JC. (2009) *Dynamic searching in the brain*, Cognitive Neurodynamics, 2009, Volume 3, Issue 4, pp.401-414.
Nicolai F. (2006) *Linguaggio d'azione. Tra linguistica e neurolinguistica*, Edizioni Del Cerbo, Pisa.
Palladino D. Palladino C. (2007) *Logiche non classiche: un'introduzione*, Carocci, Roma.
Parisi D. (2005) *Robot come psicologia*, Atti di Pianeta Galileo 2005, Centro Stampa del Consiglio Regionale della Toscana, Firenze, pp.301-308.
Peruzzi A. (1981) *Jean Piaget e l'epistemologia*, Antologia Vieusseux, 58, pp.293-316.
Peruzzi A. (2004) *Il significato* in*esistente*, Firenze University Press, Firenze.
Peruzzi A. (2005) *L'impostazione categoriale della matematica*, Atti di Pianeta Galileo 2005, Centro Stampa del Consiglio Regionale della Toscana, Firenze, pp.73-88.
Peruzzi A. (2006) *Il lifting categoriale dalla topologia alla logica*, Annali del Dipartimento di Filosofia, Firenze University Press, Firenze, pp.51-78.
Philips S. Wilson, W.H. (2010) *Categorial compositionality: a category theory explanation for systematicity of human cognition*, PLoS Computational Biology, 6(7):14.
Philips S. (2013) *A category theory perspective on compositionality and (the development of) cognitive capacity*, www.mindmodeling.org/cogsci2013/papers/0574/paper 0574.pdf
Piattelli Palmarini M. (2008) *Le scienze cognitive classiche: un panorama*, Einaudi, Torino.
Varzi A., Warglien M. (2003) *The geometry of Negation*, Journal of Applied Non-Classical Logics 13:1 (2003), pp.9-19.

DOI: 10.13128/Studi_Formaz-22177 | ISSN 2036-6981 (online)