Il Colle di Galileo

Franco Bagnoli

Più veloce della gravità

Faster than gravity

Dipartimento di Fisica e Centro Interdipartimentale per lo Studio di Dinamiche Complesse (CSDC), Università di Firenze, Via G. Sansone 1, 50019 Sesto Fiorentino (Fi)
Affiliato a INFN Sez. Firenze e al CNR - Istituto dei Sistemi Complessi

Riassunto. Nell'insegnamento della fisica ci sforziamo di far capire ai ragazzi che tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione. Tuttavia, quando facciamo cadere dei corpi composti, alcune loro parti possono effettivamente "andare più veloci" rispetto alla caduta libera. Questo esperimento si può realizzare facilmente con una catena e un manubrio da palestra. Si cerca qui di fornire degli elementi semplici per spiegare questo effetto apparentemente impossibile.

Parole chiave. Caduta libera, rotazioni, momento di inerzia.

Galileo è stato uno dei primi a stabilire che tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione. È famoso il suo (ipotetico?) esperimento fatto a Pisa, quando lasciò cadere dalla Torre due "gravi", di massa diversa ma aventi la stessa forma (per evitare differenti interazioni con l'aria), che arrivarono a terra nello stesso istante [1]. E quando si insegna fisica, ci vuole del bello e del buono per convincere gli studenti che, effettivamente, prescindendo dalla resistenza dell'aria, una piuma ed un martello cadono insieme [2,3].

Per questo, gli esperimenti che mostrano cadute con accelerazione più grande di g destano molta meraviglia. Uno di questi lo si realizza facilmente usando dei

Abstract. In teaching physics one works hard to make pupils understand that all masses fall with the same acceleration. However, if we drop compound bodies, some parts of them can actually "go faster" than free fall. This experiment can be easily accomplished with a chain and a dumbbell. Here we try to provide a simple explanation for this apparently impossible effect.

Keywords. Free fall, rotations, moment of inertia

Galileo was one of the first to establish that all masses fall with the same acceleration. In his famous (hypothetical?) Tower of Pisa experiment, two different masses of the same shape (to avoid different interactions with the air), once dropped together reach the ground at the same time [1]. And when teaching physics, one makes a great effort to convince students that, indeed, apart from air resistance, a feather and a hammer fall together [2,3].

ISSN 2281-7727 (print)
ISSN 2281-9711 (online)

Vol. 7, 2, 2018, pp. 39-45
DOI: 10.13128/Colle_Galileo-24233
www.fupress.com/cdg

manubri da palestra (o altri pesi) e qualche metro di catena (pesante) [4]. Bisogna scegliere un posto che permetta ai manubri di cadere per un bel tratto, per esempio un terrazzo. Esaminiamo quattro casi. Nel primo (A) abbiamo solo il manubrio, nel secondo (B) la catena è avvolta intorno al manubrio. Nel terzo caso (C) la catena cala per un tratto e poi risale, ed è agganciata alla ringhiera. Infine, nel quarto caso (D), la catena cala fino al suolo (Fig. 1). Chi arriverà per primo a terra?

Nonostante tutte le aspettative, i manubri non arrivano a terra insieme. Ovviamente i manubri A e B arrivano insieme, ma sono preceduti dal manubrio C: quello legato alla catena che "torna su" arriva a terra prima. Il manubrio D può arrivare prima o contemporaneamente ad A, dipende da come è fatta la catena.

Filmando la caduta e osservandola al rallentatore [4] si vede che all'inizio i due manubri A e C cadono alla stessa velocità, e solo verso la fine uno di loro accelera. L'esperimento riesce meglio se si usano catene belle grosse, con anelli abbastanza allungati e massicci.

Perché accade ciò? I gravi non dovrebbero cadere tutti insieme? Che differenza può fare una catena, e, soprattutto, perché la catena semplicemente attaccata al manubrio si comporta diversamente da quella che "torna su"?

Per spiegare questo apparente paradosso, modellizziamo gli anelli della catena che "torna su" come una serie di aste attaccate in sequenza. L'anello più in basso ruota attorno all'ultimo anello della porzione di catena che cade giù dalla ringhiera (Fig. 2 a sinistra).

Conviene considerare prima cosa succede ad una asta imperniata in un suo estremo quando "cade". È facile fare questa analisi quando l'asta è orizzontale

For this reason, experiments in which something falls with acceleration greater than *g* provoke much wonder. One of these is easily accomplished using four gym dumbbells (or other weights) and several metres of a (pretty heavy) chain [4]. One has to choose a place that allows the dumbbells to fall for quite a distance, from a terrace for example. Let us examine four cases. In the first one (A), we only have the dumbbell. In the second (B), the chain is wrapped around the dumbbell. In the third case (C), the chain falls for a stretch and then goes back, being fastened to the railing of the terrace. Finally, in the fourth case (D), the chain falls to the ground (Fig. 1). Which one will reach the ground first?

Despite all expectations, the dumbbells do not reach the ground together. Obviously, A and B arrive at the same time, but they are preceded by dumbbell C: the one linked to the chain that "goes back" reaches the ground before them. Dumbbell D may arrive before or together with A, depending on how the chain is made.

By video-recording the fall and examining it in slow motion [4], one sees that, initially, the two dumbbells A and C fall at the same speed, with only one of them accelerating more than *g* towards the end of the run. The experiment works better if one uses heavy (with respect to the mass of dumbbells) chains, with fairly elongated and large links.

Why does this happen? Aren't all masses supposed to fall together? What difference does the chain make and, above all, why does the chain which is simply attached to the dumbbell (B) behave differently from the one that "goes back" (C)?

To explain this apparent paradox, we model the links of the chain that "goes back" as a

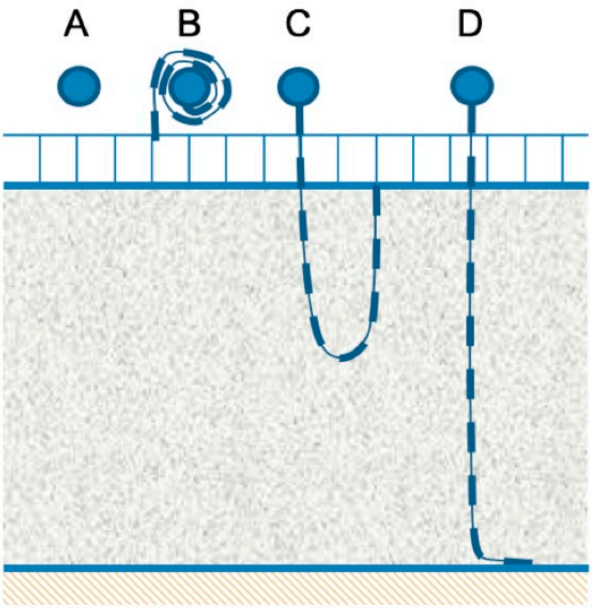

Figura 1. I quattro concorrenti per il gioco della caduta. (A) Solo un manubrio. (B) Stesso manubrio come (A) più una catena avvolta. (C) Stesso manubrio e catena di (B) ma ora la catena cade per un tratto e poi torna indietro, fissata alla ringhiera. (D) Stesso manubrio e catena di (B) e (C), ma ora la catena scende fino a terra. Chi arriverà per primo?

Figure 1. The four competitors for the falling game. (A) Just a dumbbell. (B) Same dumbbell as (A) plus a chain wrapped around. (C) Same dumbbell and chain as (B) but now the chain falls for a stretch and then goes back, fastened to the railing. (D) Same dumbbell and chain as (B) and (C), but now the chain goes down to the ground. Who will win?

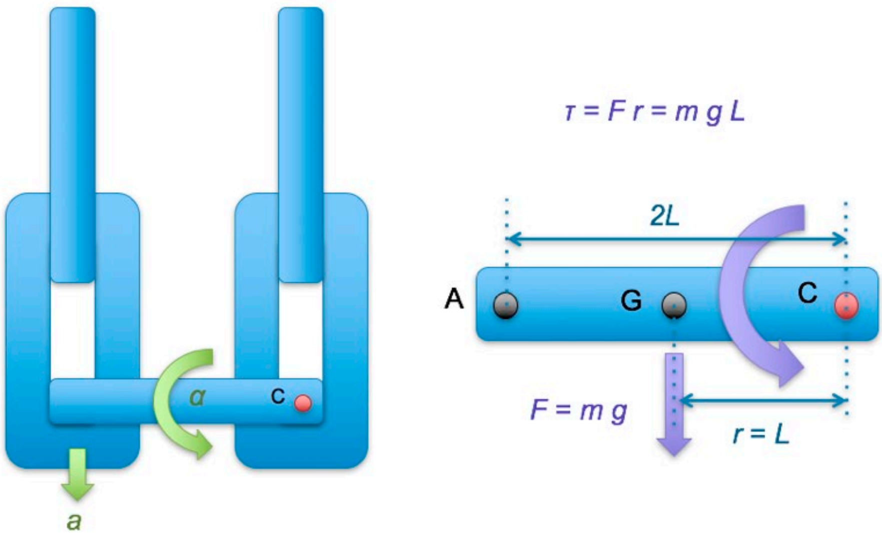

Figura 2. Rotazione degli anelli (sinistra), e dinamica di un'asta in rotazione (destra).

Figure 2. Rotation of the links (left), and dynamics of a rod in rotation (right).

(Fig. 2 a destra). Si deve usare la seconda equazione cardinale per i corpi rigidi: il momento delle forze esterne τ è uguale alla variazione del momento angolare, ovvero al prodotto del momento d'inerzia (calcolato rispetto al punto di rotazione) per l'accelerazione angolare.

Ora, una asta di lunghezza $2L$ ha il baricentro nel mezzo, e quindi il momento delle forze esterne è $\tau = \mathrm{mgL}$, che deve essere uguale a $I\alpha$. Il suo momento d'inerzia è $I = (4/3)mL^2$ e la relazione tra accelerazione angolare α e l'accelerazione lineare a del suo estremo è $a = 2\alpha\mathrm{L}$.

Sostituendo, otteniamo $a = 2mgL^2/I = (3/2)g$, ovvero l'estremità dell'asta "vorrebbe" avere una accelerazione maggiore di g.

Un anello di catena è meglio approssimato da un rettangolo, in cui indichiamo il lato lungo sempre con $2L$, e quello corto con W. La densità lineare del rettangolo è $q = m/(4L+2W)$, i due bracci lunghi hanno massa $2Lq$ e quindi momento d'inerzia (rispetto all'estremo) $(8/3)qL^3$, mentre il braccio corto che è lontano dall'asse di rotazione ha momento d'inerzia qWL^2. Sommando e sostituendo troviamo per il momento d'inerzia I_a dell'anello di catena

$$I_a = 2mL^2((4/3)\ L + W)/(2L+W)$$

che si riduce al caso precedente se W=0. Il momento d'inerzia dell'anello, se W>0, è maggiore di quello dell'asta, quindi l'effetto è un po' più piccolo di quello calcolato per l'asta, ma è sempre presente (a meno che i bracci lunghi non abbiano massa, come vedremo tra poco).

series of rods attached in sequence. The lowest link in the chain revolves around the last one which hangs down from the railing (Fig. 2-left).

One should first consider what happens to a rod pivoted at one of its ends when it "falls". It is easy to carry out this analysis when the rod is horizontal (Fig. 2-right). One must use the Euler equation for rigid bodies: the torque τ (force times the distance from the centre of rotation) is equal to the variation of the angular momentum, which for a rigid body is the product of the moment of inertia I (calculated with respect to the point of rotation) times the angular acceleration α.

Now, a rod with a length $2L$ has its centre of gravity in the middle, and therefore the torque of the gravitational force is $\tau = mgL$, which must be equal to $I\alpha$. Its moment of inertia is $I = (4/3)mL^2$ and the relationship between angular acceleration α and linear acceleration in its extreme is $a = 2\alpha L$.

Substituting, we get $a = 2mgL^2/I = (3/2)g$, which means that the end of the rod "would like" to have a greater acceleration than g.

A chain link is better approximated by a rectangle, in which we indicate the long side again with $2L$, and the short one with W. The linear density of the rectangle is $q = m/(4L +2)$. The two longer sides have mass $2Lq$ and therefore a moment of inertia (with respect to the extreme) $(8/3)qL^3$, while the short side furthest from the rotation axis has moment of inertia qWL^2. By adding all of them together and replacing the quantities, we have for the total moment of inertia I_c of the chain

$$I_c = 2mL^2((4/3)\ L + W)/\ (2L+W)$$

Quindi, ogni anello della catena “tira” giù il resto della catena ed il manubrio. All’inizio c’è molta catena da accelerare, e quindi i manubri cadono insieme. Ma via via le spinte si accumulano e la massa della catena da accelerare diminuisce, e quindi il manubrio legato alla catena “che torna su” fa uno sprint finale e vince!

Il ruolo del momento d’inerzia, che esprime la distribuzione delle masse rispetto al baricentro, è qui fondamentale [5]. Al minimo, potremmo concentrare tutta la massa nel baricentro. In questo caso il momento d’inerzia rispetto all’estremo sarebbe $I=mL^2$, e sostituendo otterremmo $a=2g$. Viceversa, mettendo tutta la massa in maniera simmetrica presso le estremità dell’asta avremmo $I=2mL^2$, e quindi $a = g$.

E il caso D? Beh, se gli anelli della catena fossero obbligati a ruotare quando si adagiano a terra, si avrebbe probabilmente un caso simile a C . Ma nelle catene normali, gli anelli possono anche scorrere, e quindi dipende dai dettagli costruttivi della catena [6].

Chissà cosa avrebbe pensato il povero Galileo se avesse visto tutto ciò!

which reduces to the previous case if $W = 0$. The moment of inertia of the link, if $W>0$, is greater than that of the rod, so its effect is a slightly lesser than that calculated before, but is always present (unless the longer sides are massless, as we shall see below).

So, every link in the chain “pulls” down the rest of the chain and the dumbbell. At the beginning, the rotating link has to pull the whole mass of chain plus the dumbbell, and therefore the dumbbells fall together. But as the torsion sums up and the mass of the chain to accelerate decreases, the dumbbell attached to the chain that “goes back” makes a final sprint and wins!

The role of the moment of inertia, which expresses the distribution of the masses with respect to the centre of mass, is essential here [5]. At a minimum, we could concentrate all the mass in the centre of mass. In this case, the moment of inertia with respect to the extreme would be $I = mL^2$, and substituting we would obtain $a = 2g$. Conversely, positioning the entire mass symmetrically at the end of the rod would give $I = 2mL^2$, and then $a = g$.

And the case of D? Well, if the chain links were obliged to turn when it reclines on the ground, one would probably have a result similar to C. But in normal chains, the links can also scroll, so the result depends on the constructional details of the chain [6].

Who knows what poor Galileo would have thought had he performed such an experiment!

Citazioni

[1] Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1610): *"…sicuramente una palla d'oro nel fine della scesa di cento braccia non preverrà una di rame di quattro dita; veduto, dico, questo, cascai in opinione che se si levasse totalmente la resistenza del mezzo, tutte le materie descenderebbero con eguali velocità".*

[2] David Scott & NASA: *Feather & Hammer Drop on Moon* (1970). https://youtu.be/5C5_dOEyAfk

[3] Brian Cox, *The world's biggest vacuum chamber* (2014). https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs&feature=youtu.be

[4] Derek Muller, *Veritasium: Chain drop experiment* (2011). https://youtu.be/1erU-Cwcl2c

[5] Anoop Grewal, Phillip Johnson, Andy Ruina, *A chain that accelerates, rather than slows, due to collisions: how compression can cause tension,* American Journal of Physics 79, 723-729 (2011). DOI: 10.1119/1.3583481 http://ruina.tam.cornell.edu/research/topics/fallingchains/chain_paperV13revised.pdf

[6] Sedeer el-Showk, *Falling faster than gravity* (2013). http://inspiringscience.net/2013/04/15/falling-faster-than-gravity/

References

[1] Galileo, G., Two New Sciences, *"We may obtain this result by observing how much the weight of the medium detracts from the weight of the moving body, which weight is the means employed by the falling body to open a path for itself and to push aside the parts of the medium, something which does not happen in a vacuum where, therefore, no difference [of speed] is to be expected from a difference of specific gravity.... Is it not clear then that a leaden ball allowed to fall from a tower two hundred cubits high will outstrip an ebony ball by less than four inches?"*

[2] David Scott & NASA: *Feather & Hammer Drop on Moon* (1970). https://youtu.be/5C5_dOEyAfk

[3] Brian Cox, *The world's biggest vacuum chamber* (2014). https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgsHYPERLINK "https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs&feature=youtu.be"&HYPERLINK "https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs&feature=youtu.be"feature=youtu.be

[4] Derek Muller, *Veritasium: Chain drop experiment* (2011). https://youtu.be/1erU-Cwcl2c

[5] Anoop Grewal, Phillip Johnson, Andy Ruina, *A chain that accelerates, rather than slows, due to collisions: how compression can cause tension,* American Journal of Physics 79, 723-729 (2011). DOI: 10.1119/1.3583481 http://ruina.tam.cornell.edu/research/topics/fallingchains/chain_paperV13revised.pdf

Franco Bagnoli

Franco Bagnoli (francobagnoli.complexworld.net) è un fisico teorico e lavora presso il Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Firenze. Studia sistemi complessi nel campo della fisica, della biologia e delle scienze cognitive. È anche interessato alla divulgazione (vedi fisicax.complexworld.net) e alla comunicazione scientifica partecipativa, ed è il presidente dell'associazione Caffè-Scienza di Firenze (www.caffescienza.it).

[6] Sedeer el-Showk, *Falling faster than gravity* (2013). http://inspiringscience.net/2013/04/15/falling-faster-than-gravity/

Franco Bagnoli (francobagnoli.complexworld.net) is a theoretical physicist working in the Department of Physics and Astronomy, at the University of Florence. He studies complex systems in physics, biology and cognitive sciences. He is also interested in science popularisation (see fisicax.complexworld.net – in Italian) and science communication and participation, and is the chairman of the Florence Science Café association (www.caffescienza.it).